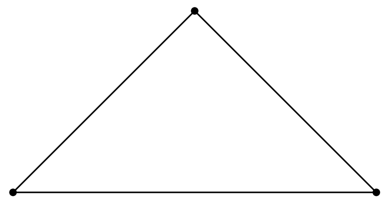
Beweise im Schulunterricht: strukturiertes Denken und präzise Sprache

ROBERT F. TICHY (TU GRAZ)

§ **1.** Ziel dieses Artikels ist es auf einige Beobachtungen hinzuweisen, die ich während der letzen 30 Jahre als Universitätslehrer im Rahmen von Mathematik-Lehrveranstaltungen für technisch-naturwissenschaftliche Studienrichtungen gemacht habe. Es fällt auf, dass Studierende logische Zusammenhänge nicht präzise formulieren können, und dass oft die Notwendigkeit von Begründungen für Sachverhalte nicht eingesehen wird. Eine Ursache dafür liegt womöglich darin, dass etwa mathematische Aussagen, physikalische Gesetze etc. jederzeit im Internet abgerufen werden können. Dabei ist aber das Erkennen logischer Zusammenhänge neben dem Experiment und empirischen Untersuchungen eine wichtige Basis unserer auf technologischer Entwicklung begründeter modernen Zivilisation. Reines Tatsachenwissen bekommt einen immer geringeren Stellenwert. Die Berufswelt ist zudem sehr stark von interdisziplinärer Zusammenarbeit geprägt und daher wird die Fähigkeit, sich präzise auszudrücken immer wichtiger. Wenn etwa bei einem Großprojekt Maschinenbau-Ingenieure mit Physikern und Industrie-Designern zusammenarbeiten sollen, ist eine klare Sprache mit eindeutigen Formulierungen aller beteiligten Personen unerlässlich. Meine Erfahrung mit Studienanfängern zeigt, dass diese Fähigkeit in den letzten Jahren abgenommen hat, und ich möchte im Rahmen dieses Vortrages einige Anregungen zur Verbesserung der gegenwärtigen Situation geben.

§**2.** Die Bedeutung der Mathematik für unsere Gesellschaft will ich durch das folgende Diagramm veranschaulichen:



Mathematik ist ein Werkzeug zur Lösung von Problemen unserer modernen hochtechnologisierten Gesellschaft. Sie ist aus Informationstechnologie (Datensicherheit, Bildverarbeitung), Medizin (Computertomographie), Biologie, Materialwissenschaften und Physik, Finanzwirtschaft und vielen anderen Gebieten nicht wegzudenken. Mit einer gewissen Berechtigung kann Mathematik als eine „Schlüsseltechnologie" bezeichnet werden. Mathematik ist aber auch eine sehr alte Disziplin, die eng mit der kulturellen Entwicklung der Menschheit verbunden ist. In Zeiten großer zivilisatorischer Entwicklungsschübe gab es große Fortschritte der Mathematik. Das war in der griechischen Antike so, am Beginn der Neuzeit, und auch jetzt im Zeitalter der Digitalisierung ist die Mathematik einer starken Dynamik unterworfen. Der Schulunterricht sollte alle ihre Aspekte vermitteln. Im Rahmen dieses Vortrages lege ich das Hauptaugenmerk auf den im oberen Eckpunkt des Dreiecks dargestellten Aspekt: Mathematik als universelle Sprache zur Formulierung von Naturgesetzen. Sie ist bestens geeignet, logisch-strukturiertes Denken zu schulen. Mathematik ist gewissermaßen auch die Geisteswissenschaft unter den Naturwissenschaften. Für mich persönlich hat Mathematik zwei weitere Facetten, die dafür maßgebend sind, dass ich mich seinerzeit dafür entschieden habe „Berufsmathematiker" zu werden: Mathematik hat einen ästhetischen und einen sportlichen Reiz: Sätze und Beweise können wirklich „schön" und „elegant" sein und das Lösen eines „kniffligen" mathematischen Problems hat noch dazu eine gewisse sportliche Komponente.

§**3.** Oft beginne ich Mathematik-Vorlesungen für Studierende technischer Fächer im ersten Semester mit den Worten: „Die alten und reichen Studierenden mögen auf der linken Seite des Hörsaals Platz nehmen, wer sitzt auf der rechten Seite?" Es sind immer Antworten „die jungen und armen Studierenden“ dabei. Das darf nicht passieren, jedenfalls nicht unter Personen mit Matura und technisch-naturwissenschaftlichen Interessen, korrektes Verneinen $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$ sollte eine Selbstverständlichkeit sein. Bei dieser Gelegenheit stelle ich auch manchmal eine Aufgabe, wie sie früher gerne von Personalchefs bei Vorstellungsgesprächen gestellt wurde: „$1\frac{1}{2}$ Hühner legen $1\frac{1}{2}$ Eier in $1\frac{1}{2}$ Tagen, wie viele Eier legt ein Huhn pro Tag?“ Die Formulierung der Aufgabe zeigt, dass Mathematik eine abstrakte Sprache verwendet, wo es nur auf die Zusammenhänge ankommt und, dass es natürlich für die Beantwortung unerheblich ist, ob es 1,5 lebende Hühner gibt. Natürlich erwarten wir von Studierenden-naturwissenschaftlicher Fächer ein gewisses Abstraktionsvermögen, offensichtlich tun dies auch manche Personalchefs. Die Lösung kann mit einer einfachen Schlussrechnung gegeben werden: $1\frac{1}{2}$ Eier von $1\frac{1}{2}$ Hühnern in $1\frac{1}{2}$ Tagen bedeutet 1 Ei von 1 Huhn in $1\frac{1}{2}$ Tagen bedeutet $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ Eier von 1 Huhn in 1 Tag. Leider kann diese Aufgabe nicht von allen StudienanfängerInnen unserer Universität bewältigt werden. Und nun noch zu einer dritten solchen Einstiegsfrage: „Welche Schlaufe eines Wollfadens ist größer: jene, die durch Umwickeln zweier Stricknadeln mit Durchmesser je 3 mm entsteht, oder jene, durch Umwickeln einer Nadel mit Durchmesser 5 mm?“

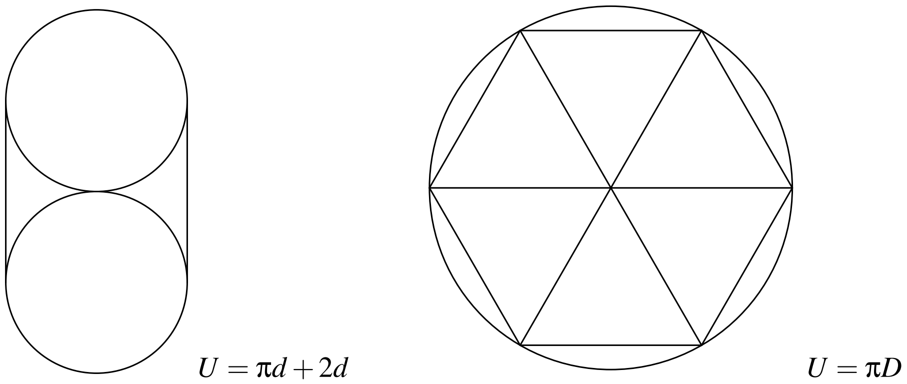
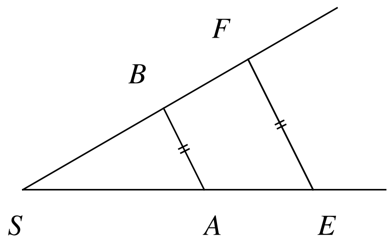


Abb. 1:

Setzt man für die Durchmesser $d = 3$ mm und $D = 5$ mm, so ergibt sich die Antwort aus der Tatsache, dass $\pi > 3$ ist. Natürlich erwarten wir die Kenntnis der Kreiszahl π von unseren StudienanfängerInnen, aber nur ein Teil von ihnen kann eine Begründung für $\pi > 3$ angeben, ohne sich auf den Taschenrechner und die dort dargestellte Dezimalentwicklung $\pi = 3,14159\ldots$ zu berufen. Das in der rechten Zeichnung eingeschriebene Sechseck der Seitenlänge $R = D/2$ liefert die Antwort.

§**4.** Das letzte Beispiel zeigt, dass bei der Kreismessung zwangsläufig die Zahl π auftritt und man soll im Schulunterricht nicht davor zurückschrecken, diese als „Naturkonstante“ zu behandeln und sie experimentell zu bestimmen (etwa mit einem Wollfaden). Das Messen (von Längen) ist ein schönes Modell zum Aufbau des Zahlsystems. Der Strahlensatz $\overline{SA} : \overline{AE} = \overline{SB} : \overline{BF} = p : q$



erlaubt es, eine vorgegebene Einheitsstrecke $\overline{SE}$ in einem beliebigem Verhältnis $p : q$ zu teilen. Auf diese Weise kann man geometrisch alle positiven rationalen Zahlen realisieren. Erweitert man die Längenmessung auf das Abmessen der Diagonale im Einheitsquadrat, dann treten Irrationalzahlen zu Tage.

Bei dieser Gelegenheit ist es natürlich unerlässlich, den Pythagoräischen Lehrsatz zu besprechen. Ich stelle oft meinen Studienanfängern die Frage, mit welchem Namen die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ verbunden ist. Die meisten geben die richtige Antwort „Pythagoras“, aber gelegentlich hört man auch den Namen „Einstein“ im Zusammenhang mit dieser Formel. Das zeigt, dass es an einer kulturgeschichtlichen Einordung mathematischer Erkenntnisse mangelt, der Schulunterricht sollte dieser Unkenntnis vorbauen. Will man von den StudienanfängerInnen eine Begründung für den Pythagoräischen Lehrsatz hören, dann gibt es vielleicht 10 von 500 angehenden Maschinenbau-Studierenden, die dazu in der Lage sind - ein unglaubliches Defizit. Die zweite Zeichnung in Abb. 2 zeigt vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a,b und Hypothenuse c in einem Quadrat der Seite $(a+b)$. Die innere Figur hat 4 gleiche Seiten c, ist also eine Raute, und da sie auch lauter rechte Winkel hat, ist sie ebenfalls ein Quadrat (mit Seite c). Beim letzten Schluss wurde verwendet, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, was natürlich auf dem Parallelenaxiom beruht (siehe dritte Zeichnung in Abb. 2).

Hier soll durchaus angemerkt werden, dass das Parallelenaxiom die Grenzen mathematischen Arbeitens aufzeigt. Manche Sachverhalte sind nicht weiter begründbar, mann kann sie nur mehr als Axiome akzeptieren, solange sie nicht zu Widersprüchen führen. Und in der Tat hat Einstein gezeigt, dass die Geometrie in der Nähe großer Massen nicht mehr euklidisch ist, also das Parallelenaxiom verletzt wird. Als anschauliches Modell bietet sich die Erdkugel an: es gibt keinen Großkreis durch den Nordpol der nicht den Äquator schneidet. Damit ist klar: sowohl euklidische als auch nichteuklidische Geometrien sind sinnvoll und kommen in der physikalischen Wirklichkeit vor.

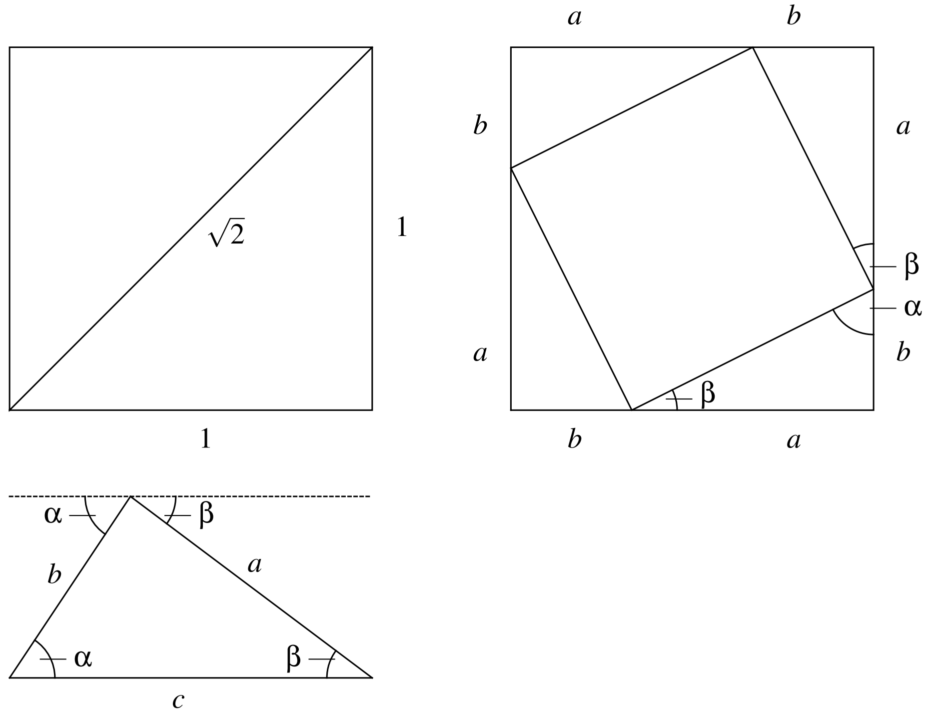


Abb. 2:

Ein Flächenvergleich in der zweiten Zeichnung von Abb. 2 liefert sofort

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2},$$

woraus der „Pythagoras“ $a^2+b^2=c^2$ unmittelbar folgt. Zweimalige Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes liefert bekanntlich den Kosinussatz für allgemeine (spitzwinkelige) Dreiecke (siehe Abb. 3).

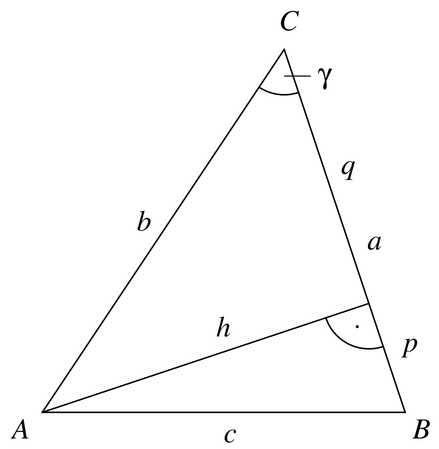


Abb. 3:

Für die Höhe h auf a gilt nämlich nach Pythagoras $b^2 = h^2 + q^2$ und $c^2 = h^2 + p^2$, also $b^2 - q^2 = c^2 - p^2 = c^2 - (a-q)^2 = c^2 - a^2 + 2aq - q^2$. Daraus folgt unmittelbar $a^2 + b^2 - 2aq = c^2$ und somit der Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ich erlaube mir hier anzumerken, dass immer wieder Begründungen für den Kosinussatz mittels Vektorrechnung (Skalarprodukt) gegeben werden. Man verifiziert dabei durch Koordinatendarstellung die Formel $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, wendet diese auf die Seitenvektoren $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$ mit $|\,\vec{a}\,| = a, |\,\vec{b}\,| = b, |\,\vec{a} - \vec{b}\,| = c$ an und verwendet die Projektionsformel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cos\gamma$. Dabei ist jedoch zu beachten, dass genau der Kosinussatz diese Interpretation des Skalarprodukts liefert und man also den Pythagoräischen Lehrsatz benötigt, um diese für Geometrie und Physik (physikalische Arbeit) wichtige Deutung des Skalarproduktes zu gewinnen.

§**5.** Eine einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras (siehe erste Zeichnung in Abb.2) zeigt, dass die Diagonale im Einheitsquadrat die Länge $\sqrt{2}$ hat. Es stellt sich sofort die Frage, ob diese Zahl in unserem mit dem Strahlensatz konstruierten Zahlenvorrat der positiven rationalen Zahlen vorkommt. Die Antwort ist bekanntlich „nein“ und die Begründung liefert ein Musterbeispiel für einen „indirekten Beweis“.

Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Dabei sind a, b positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, denn jeder Bruch kann in gekürzter Darstellung angeschrieben werden. Aus dieser Annahme folgt $a^2 = 2b^2$, also muss a gerade sein, d.h. $a = 2a_1$ mit $a_1 \in \mathbb{N}$. Damit folgt weiter $4a_1^2 = 2b^2 \Rightarrow 2a_1^2 = b^2 \Rightarrow b = 2b_1$ mit $b_1 \in \mathbb{N}$. Insgesamt ergibt sich also, dass a und b den gemeinsamen Teiler 2 enthalten müssen, im Widerspruch zur Annahme $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ in gekürzter Form. Dieser einfache logische Schluss zeigt, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein muss und dass man sich in der Mathematik mit diesen Objekten beschäftigen muss. Der Nachweis der Irrationalität von π ist weit komplizierter und jenseits der Schulmathematik (siehe Hardy-Wright (1958) mit historischen Angaben sowie [E]).

Will man Irrationalzahlen in Dezimalentwicklung darstellen, so erhält man unendliche (nicht-periodische) Entwicklungen

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots a_n a_{n+1}\ldots, \qquad \pi = 3{,}141\ldots b_n b_{n+1}\ldots$$

In diesem Zusammenhang gibt es eine Vielzahl berühmter offener mathematischer Probleme. Es ist zum Beispiel unbekannt, ob jede Ziffer in der Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ oder von π unendlich oft vorkommt.

Jedenfalls zeigen die Konstanten $\sqrt{2}$ und π, dass das „Unendliche“ in der Mathematik eine präzise Bedeutung bekommt. Diese Zahlen beschreibt man etwa dadurch, dass nach jeder bekannten Dezimalstelle a_n die nächste Stelle a_{n+1} bestimmt werden kann. Je mehr Dezimalstellen bekannt sind, umso genauer kennt man den Wert von $\sqrt{2}$. Bekanntlich gibt es noch andere günstige Näherungen zur Berechnung von $\sqrt{2}$, z.B.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad x_0 = 2.$$

Das liefert einen einfachen rekursiven Algorithmus zur schrittweisen näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$. An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, dass der Begriff des Algorithmus in vielen Anwendungsbereichen moderner Technologien eine zentrale Rolle spielt. Er sollte daher im Mathematik-Unterricht bei passender Gelegenheit diskutiert werden.

§**6.** Ein besonders gutes Beispiel für einen effizienten Algorithmus ist der Euklidische Algorithms zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen. Dieses Verfahren ist äußerst effizient und eine der Grundlagen bei modernen Ver- und Entschlüsselungssystemen. Kennt man etwa die Primfaktorzerlegung von zwei natürlichen Zahlen $M = p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}$ und $N = q_1^{n_l} \ldots q_l^{n_e}$, dann kann der größte gemeinsame Teiler leicht abgelesen werden. Allerdings gibt es bis heute keinen effizienten Algorithmus zur Erstellung der Primfaktorzerlegung, d.h. zum Auffinden aller weiter nicht mehr zerlegbaren Teiler p_i von M (bzw. q_j von N). Das wohlbekannte Sieb des Eratosthenes zur Erstellung einer Liste von Primzahlen ist sehr aufwändig. Nun wurde aber 2002 von M. Agrawal, N. Kayal und N. Saxena ein effizienter Algorithmus gefunden, der es ermöglicht festzustellen, ob eine gegebene natürliche Zahl eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Das hilft aber nicht, die Primteiler zu finden. Da solche Faktorisierungsprobleme in der Kryptographie eine eminente Bedeutung besitzen, arbeiten tausende von Mathematikern an der Entwicklung entsprechender Algorithmen. Weitere Informationen zu dieser Thematik findet man in der Literatur zum RSA Verfahren, für erste Hinweise sei auf den diesbezüglichen Eintrag in Wikipedia verwiesen. Um Verschlüsselungssysteme vor Hacker-Angriffen sicher zu machen, sind ständig neue und größere Primzahlen notwendig. Prinzipiell ist das kein Problem, da es nach Euklid unendlich viele Primzahlen gibt. Eine Begründung dafür liefert der folgende sehr schöne indirekte Beweis.

Angenommen $p_1, \ldots, p_K$ ist die vollständige Liste aller Primzahlen. Betrachte die Zahl $M = p_1 \ldots p_K + 1$ (also das um 1 vermehrte Produkt). Dann besitzt M einen Primteiler p. Dieser kann nicht in der Liste enthalten sein, denn sonst müsste er 1 teilen, was nicht möglich ist, denn eine Primzahl ist eine natürliche Zahl > 1, die keinen echten Teiler besitzt.

Auch diese Überlegung zeigt, wie die präzise Sprache der Mathematik es ermöglicht, das „Unendliche" zu erfassen, oder zumindest es zu beschreiben. Betrachtet man eine mit dem Sieb des Eratosthenes erstellte Liste der Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots,$$

so erkennt man eine Reihe von Primzahlzwillingen, das sind Primzahlen mit Abstand 2. Es ist ein berühmtes offenes Problem zu zeigen, dass es unendlich viele solcher Zwillinge gibt. Kürzlich ist ein großer Fortschritt bei diesem Problem erzielt worden: es gibt eine unendliche Folge von Primzahl-Paaren p_k, q_k sodass der Abstand $q_k - p_k \leq 246$ ist. Ein erstes Resultat in diese Richtung - mit $7 \cdot 10^7$ anstelle der Zahl 246 - geht auf den in der USA lebenden chinesischen Mathematiker Y. Zhang zurück. Könnte man die Konstante 246 durch 2 ersetzen, wäre das Zwillingsproblem gelöst.

In diesem Zusammenhang ist es mir ein Anliegen, darauf hinzuweisen, dass man im Schulunterricht immer wieder auf neue Entwicklungen in der Mathematik hinweisen soll, um der irrigen Meinung vorzubeugen, dass es in unserem Fach seit Jahrhunderten keine Fortschritte gibt. Ich betone in diesem Vortrag bewusst nicht den Aspekt, wie Mathematik als Werkzeug eingesetzt werden kann. Jedenfalls können einfache Verschlüsselungsverfahren gute Beispiele zur Anwendbarkeit mathematischer Konzepte auf Schulniveau liefern.

§**7.** Zum Abschluss dieses Vortrages möchte ich auf eine der größten „Lichtgestalten" in der Geschichte der Mathematik zu sprechen kommen. Nicht umsonst ist das Portrait von Archimedes auf der Fields-

Medaille (der größten Auszeichnung für Mathematiker jünger als 40) abgebildet. Er hat in meisterhafter Weise mathematische und physikalische Überlegungen verwendet, um die schwierigsten Probleme seiner Zeit zu lösen. Ich denke dabei an seine Exhaustionsmethode, mit der er seiner Zeit weit voraus war und einen Vorgriff auf die Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz getätigt hat:

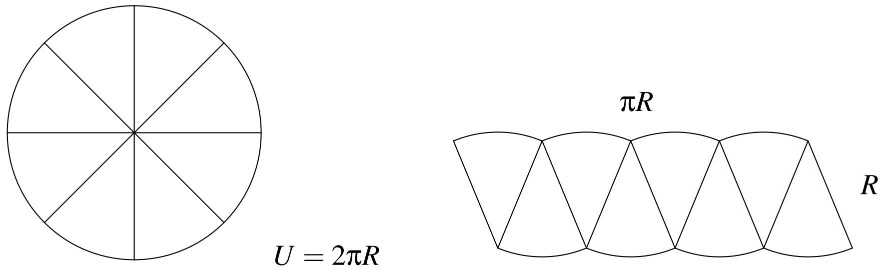


Abb. 4:

Die „Zerlegung“ des Kreises in „kleine“ Sektoren und näherungsweise Zusammensetzung zu einen Rechteck erlaubt die Berechnung der Kreisfläche nach der Formel πR^2. Mit einer kunstvollen mechanischen Konstruktion hat er das Kugelvolumen berechnet, indem er eine Art Mobile konstruiert hat: auf einer Seite ein Zylinder, auf der anderen Seite eines Hebels ein Kegel und eine Kugel. Durch geeignetes „Zerschneiden“ der Körper nach seiner Exhaustionsmethode konnte er beweisen, dass der Hebel im Gleichgewicht ist. Damit hat Archimedes das Kugelvolumen berechnet, wenn Zylinder- und Kegelvolumen bekannt sind (vgl. [M. Ruppert (2011)]). Wenn man im Unterricht ein „Schmankerl“ für Interessierte bringen will, dann bietet sich eine Diskussion dieser Methode von Archimedes an. Sie zeigt auch sehr schön, wie mathematische und physikalische Überlegungen ineinandergreifen. Ich möchte im Folgenden diese Berechnung durchführen, um zu zeigen, wie man die Rauminhalte einfacher Körper bestimmen kann (ohne Integralrechnung), indem ich das Archimedische Exhaustionsprinzip allerdings in der Formulierung von Cavalieri (Cavalierisches Prinzip) benütze:

Legt man zwei Körper K_1, K_2 nebeneinander auf eine horizontale Ebene und sind in jeder Höhe x die Querschnittflächen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ gleich groß, so haben K_1 und K_2 gleiches Volumen.

Dieses Prinzip ist einfach zu motivieren , indem man die Körper in Scheiben kleiner Höhe Δ zerschneidet. Da das Volumen einer Scheibe $F \cdot \Delta$ (Grundfläche mal Höhe) beträgt, ergibt sich durch „Aufsummieren“ der Scheiben-Volumina, die Volumsgleichheit der Körper. Aus moderner Sicht verbirgt sich dahinter natürlich die Integralrechnung, zum Verständnis ist sie aber hier nicht nötig. Damit kann man die Kugel mit Radius R neben einen Zylinder mit Radius R und Höhe $2R$ legen, aus dem ein Doppelkegel herausgenommen wird:

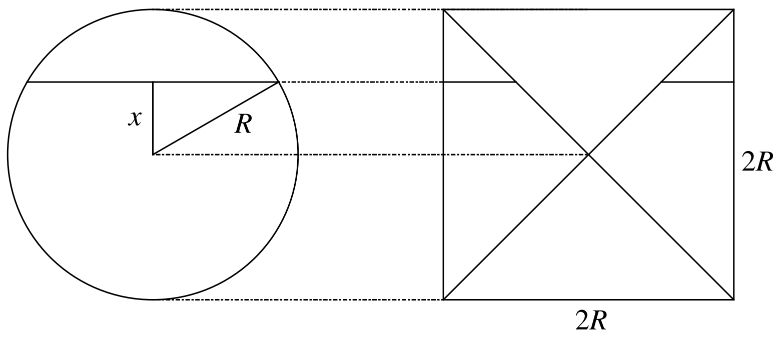


Abb. 5:

Die horizontale Querschnittsfläche in der Höhe x über dem Mittelpunkt beträgt bei der Kugel $\pi(R^2 - x^2)$ (Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - x^2}$) und bei dem Differenzkörper von Zylinder und Kegel $\pi R^2 - \pi x^2$ (Kreisring mit äußerem Radius R und innerem Radius x). Nach Cavalieri haben also beide Körper gleiches Volumen, das sich beim „Differenzkörper“ leicht ermitteln lässt

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2\pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Dabei ist das Zylindervolumen nach der Ausgangsdefinition durch $F \cdot h$ zu berechnen. (Ein Zylinder ist eine kreisförmige Scheibe.) Was noch begründet werden muss ist die Volumsformel für den Kegel. Nach dem „räumlichen“ Strahlensatz

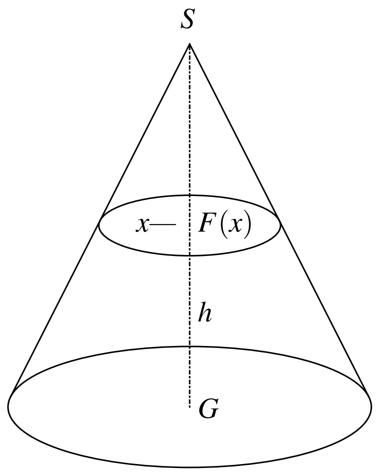


Abb. 6:

für Pyramiden mit Spitze S in der Höhe h über der allgemeinen Grundfläche G ergibt sich:

$$\frac{F(x)}{G} = \frac{x^2}{h^2} \quad \text{(Flächeninhalte verhalten sich wie die Quadrate der Abstände)}$$

und damit für die Querschnittsfläche $F(x) = \frac{x^2}{h^2} G$. Wenn man nun die Integralrechnung zur Verfügung hat, folgt die Formel für das Volumen sofort, indem man die Pyramide in Scheiben der Höhe $\Delta = \Delta x$ zerlegt und nach x über $0 \leq x \leq h$ integriert:

$$V = \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} G \cdot h.$$

Da der Kegel eine Pyramide mit kreisförmiger Grundfläche ist, ergibt sich für das Kegelvolumen der Wert $\pi R^2 \frac{h}{3}$. Will man hier den Integralbegriff vermeiden, so kann man die Höhe in Intervalle der Längen $\Delta x = \frac{1}{n} (n \to \infty)$ zerlegen und anstelle des Integrals Summen und Grenzwerte von Folgen berechnen. Es sei aber bemerkt, dass man die Formel für das Pyramidenvolumen V ausschließlich durch das oben formulierte Cavalierische Prinzip und den Strahlensatz begründen kann. Dazu muss man nur überlegen, dass V direkt proportional zur Grundfläche und zur Höhe ist.

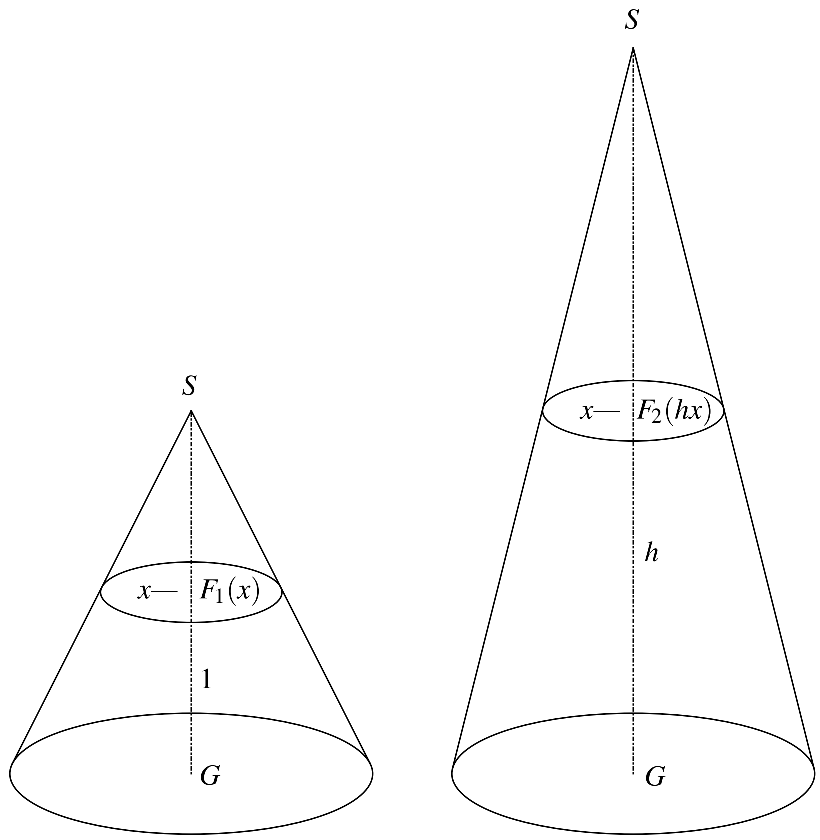


Abb. 7:

Man geht dabei nach Abb. 7 vor und betrachtet zwei Pyramiden P_1, P_2, mit gleicher Grundfläche G, die erste mit Höhe mit 1, die zweite mit Höhe h. Dann zerlegt man die erste Pyramide in Scheiben der Höhe Δ und die zweite in Scheiben der Höhe $h\Delta$. Dieses Scheibenvolumen ist direkt proportional zu h und die Scheiben der beiden Zerlegungen entsprechen einander, was aus dem Strahlensatz folgt. Daher ist das Volumen direkt proportional zur Höhe h. Ähnlich argumentiert man bei der Grundfläche.

Es bezeichnet in Abb. 7 $F_1(x)$ die Querschnittsfläche der ersten Pyramide P_1 in Höhe x und $F_2(hx)$ die Querschnittsfläche der zweiten Pyramide P_2 in Höhe hx (jeweils von der Spitze weg gemessen). Der Strahlensatz liefert

$$F_1(x) = x^2 = \frac{(hx)^2}{h^2} = \frac{F_2(x)}{G},$$

woraus $F_1(x) = F_2(hx)$ folgt, also Vol $(R_2) = h \cdot$ Vol (P_1).

Ferner gilt nach dem Cavalierischen Prinzip und nach dem „räumlichen“ Strahlensatz für zwei Pyramiden K_1 und K_2 mit den Grundflächen G_1 und G_2 und gleicher Höhe h sowie mit Querschnittsflächen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ in der Höhe x:

$$\frac{F_1(x)}{G_1} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{F_2(x)}{G_2}.$$

Damit folgt $F_2(x) = \frac{G_2}{G_1} F_1(x)$ für alle Querschnittsflächen, was folglich auch für die Volumina entsprechender Scheiben mit Höhen Δ gilt. Also ist Vol $(K_2) = \frac{G_2}{G_1}$Vol (K_1). Das Pyramidenvolumen ist somit direkt proportional zur Grundfläche.

Somit gilt eine Formel $V = c \cdot Gh$ mit einer Proportionalitätskonstanten c, die zu bestimmen ist. Dazu verwendet man eine Pyramide, deren Grundfläche ein halbes Einheitsquadrat ist und zerlegt den Einheitswürfel $[0,1]^3$ in 6 solche Tetraeder (siehe Abb. 8). Diese Tetraeder haben die Eckpunkte $(0,0,0)$ und $(1,1,1)$ gemeinsam und sind in kartesischen Koordinaten durch folgende Ungleichungen festgelegt:

$$x \leq y \leq z,\ x \leq z \leq y,\ y \leq x \leq z,\ y \leq z \leq x,\ z \leq x \leq y,\ z \leq y \leq x.$$

Daher gilt $1 = 6V = 6c \cdot \frac{1}{2}$, also $c = \frac{1}{3}$. Damit ist die bekannte Volumsformel $V = \frac{1}{3}Gh$ für allgemeine Pyramiden (und daher auch für den Kegel) gezeigt.

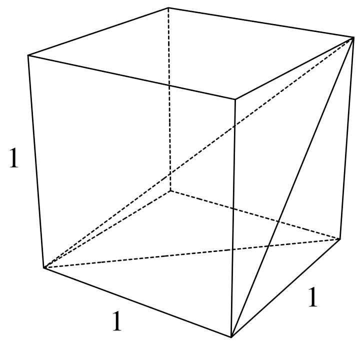


Abb. 8:

Abschließend sei an dieser Stelle angemerkt, dass man im Gegensatz zu Flächenberechnungen ebener Figuren Volumsbestimmungen allgemeiner Körper (etwa von Pyramiden) nicht mehr ausschließlich durch Zerlegungen in einfache Körper begründen kann, sondern nur dadurch, dass man gewisse „infinitesimale“ Konstruktionen, wie etwa die Exhaustionsmethode von Archimedes, das Prinzip von Cavalieri oder die „moderne“ Maß- und Integrationstheorie zulässt. Die diesbezügliche Frage nach solchen „nicht-infinitesimalen“ Volumsbestimmungen wurde von David Hilbert (1900) in seiner berühmten Liste mathematischer Probleme angeführt und bereits von M. Dehn (1903) durch Konstruktionen von Gegenbeispielen negativ beantwortet.

§8. Zusammenfassung

Zweck dieses Vortrages war es die drei eingangs formulierten wesentlichen Aspekte der Mathematik, nämlich Mathematik als Werkzeug, als Kulturgut und als logisch strukturierte präzise Sprache näher zu beleuchten und durch für den Schulunterricht geeignete Beispiele zu untermauern. Der Fokus wurde auf logisch saubere Begründungen gelegt, die in jeder Schulstufe in den Unterricht eingebaut werden können. Damit kann erreicht werden, dass sich die Schülerinnen und Schüler präzise ausdrücken können und logische Zusammenhänge besser erkennen.

Für Diskussionen über das Prinzip von Cavalieri danke ich Peter Grabner, für die Erstellung der Abbildungen Mario Weitzer. Die angegebene Literatur ist im Internet zu finden.

R. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena; PRIMES in P, vgl. auch den Eintrag in Wikipedia.

G.H. Hardy und E.M. Wright, Einführung in die Zahlentheorie, München 1958.

M. Ruppert, Archimedes, der Kreis und die Kugel, ML-Heft Nr. 165 (2011), S. 48-53.

[E], Elementarer Beweis der Irrationalität von π; `http://www.lrz-muenchen.de/hr/numb/pi-irr.html`